

## ДЕФОРМАЦИЯ МАГНИТНОГО ЭЛАСТОМЕРА С УЧЕТОМ МАГНИТОИНДУЦИРОВАННОГО СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ\*

О.В. Столбов, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

В работе представлена численная схема, обеспечивающая детальный расчет квазистатического деформирования образцов мягких магнитных эластомеров (ММЭ), содержащих несколько десятков частиц. Алгоритм организован следующим образом. Сначала для образца заданной формы методом конечных элементов при заданных граничных условиях вычисляется тензор линейного отклика  $L$ , связывающий между собой смещения границ образца и частиц внутри него для заданного на них распределения сил. Полная энергия системы берется в виде суммы упругой (вычисляемой с помощью  $L$ ) и магнитной энергий, а затем ищется минимум этой функции для каждого значения приложенного магнитного поля в предположении о несжимаемости матрицы и взаимной непроницаемости частиц. Таким образом определяются равновесные смещения каждой из частиц и деформация границ образца ММЭ. Предложенный подход устойчив даже при значительной перестройке структуры. Для примера рассмотрен образец ММЭ, содержащий 64 частицы. Представлены кривые напряженно-деформированного состояния при различных значениях приложенного поля, а также определена полевая зависимость эффективного модуля упругости рассмотренного ММЭ.

*Ключевые слова:* феррогель, магнитомеханика, магнитоупругость.

### Введение

Мягкие магнитные эластомеры (ММЭ) – новые композитные материалы, получаемые путем наполнения высокоэластичных низкомолекулярных полимеров ферромагнитными частицами микро/нано размера. Эти системы образуют отдельное семейство смарт-материалов с сильной реакцией на внешнее магнитное поле. В настоящее время ведутся активные разработки по использованию ММЭ в технике (бесконтактные датчики, микроманипуляторы, адаптивные демпферы, искусственные мускулы), медицине (микровезикулы для доставки лекарств внутри жи-

вого организма) и других областях. Для развития технологий использования ММЭ необходимо понимание механизмов формирования и эволюции их внутренней структуры при магнитном и механическом воздействиях. Это, в свою очередь, требует разработки эффективных численных моделей, описывающих указанные явления.

### Задача теории упругости

Рассмотрим образец, занимающий область  $\Omega$  и состоящий из  $N$  твердых сферических частиц, находящихся в упругой матрице. Частица  $i$  занимает область  $\Omega_i^p$ ,

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Пермского края (проект № 13-01-96056).

а  $\Omega^m = \Omega \setminus \Omega_1^p \setminus \Omega_2^p \dots \setminus \Omega_N^p$  – область, занимаемая упругой матрицей. Введем функцию  $I_i^p(\mathbf{r})$  – индикатор  $i$ -й частицы и функцию  $I^m$  – индикатор матрицы:

$$I_i^p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_i^p \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_i^p \end{cases} \quad (1)$$

$$I^m(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega^m \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega^m \end{cases}$$

На  $i$ -ю частицу действует сила  $\mathbf{F}_i^p$ , приложенная к ее центру. Поверхность  $\Gamma_u$  закреплена, а на границе  $\Gamma_f$  действует равномерно распределенное усилие  $\mathbf{F}^b$ .

Система уравнений теории упругости, соответствующая рассматриваемой задаче, имеет вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{f} = \sum_{i=1}^N I_i^p \mathbf{F}_i^p / V_i,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{g} + 2G\mathbf{e},$$

$$\text{tr } \mathbf{e} = 0, \quad G = G_m I^m + \sum_{i=1}^N I_i^p G_p, \quad (2)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_f} = \mathbf{F}_b / S_f,$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^*,$$

где  $G_m$  – модуль сдвига матрицы,  $G_p$  – модуль сдвига материала частиц (на несколько порядков превышает  $G_m$ ), а  $S_f$  – площадь поверхности  $\Gamma_f$ .

Под воздействием сил  $\mathbf{F}_i^p$  происходит движение центров масс частиц, их вращение и перемещение границы  $\Gamma_f$ . Введем среднее смещение  $i$ -й частицы и среднее смещение поверхности  $\Gamma_f$ :

$$\mathbf{u}_i^p = \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i^p} \mathbf{u} dV, \quad \mathbf{u}^b = \frac{1}{S_f} \int_{\Gamma_f} \mathbf{u} dS, \quad (3)$$

где  $V_i$  – объем  $i$ -й частицы.

Определим обобщенные векторы сил  $\mathbf{F}$  и перемещений  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1^p, \mathbf{F}_2^p, \dots, \mathbf{F}_N^p, \mathbf{F}^b\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1^p, \mathbf{u}_2^p, \dots, \mathbf{u}_N^p, \mathbf{u}^b\}$$

и введем  $\mathbf{C}$  – матрицу линейного упруго-

го отклика системы твердых сферических частиц и границы  $\Gamma_f$ . Эта матрица связывает средние смещения частиц  $\mathbf{u}_i^p$  и границы  $\mathbf{u}^b$  с силами, приложенными к центрам частиц  $\mathbf{F}_i^p$  и  $\mathbf{F}^b$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}. \quad (5)$$

Чтобы найти матрицу  $\mathbf{C}$  нужно  $3(N+1)$  раз решить упругую задачу (2). На  $i$ -м шаге вектор силы задается условием  $F_k = 0$ , если  $k \neq i$ , а  $F_i = 1$ . Затем из решения задачи (2) находится вектор  $\mathbf{U}$ , являющийся  $i$ -й строкой матрицы  $\mathbf{C}$ . Для дальнейших расчетов удобнее ввести обратную матрицу  $\mathbf{L} = \mathbf{C}^{-1}$ , так что

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}. \quad (6)$$

Найдем приращение работы, совершаемой силами  $\mathbf{F}_i^p$  и  $\mathbf{F}^b$  на перемещениях  $\mathbf{u}_i^p$  и  $\mathbf{u}^b$ :

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{U}. \quad (7)$$

По закону сохранения эта работа равна упругой энергии, запасенной в матрице. Проинтегрировав  $dW$ , получим

$$W = U_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}. \quad (8)$$

### Задача магнитостатики

Потенциал магнитного диполя, находящегося в начале координат, имеет вид

$$\psi = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (9)$$

Найдем его магнитное поле

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}) = -\nabla \psi = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}. \quad (10)$$

Суммарное магнитное поле в произвольной точке пространства  $\mathbf{r}$  для ансамбля из  $N$  диполей, расположенных в точках  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{u}_j^p$  ( $\mathbf{r}_j^0$  – начальные координаты частиц) во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  и имеющих магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}_j$ , запишется:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \boldsymbol{\mu}_j). \quad (11)$$

Положим, что частицы намагничиваются по линейному закону

$\mu/V = m = \chi H^{(i)}$ , где  $H^{(i)}$  – магнитное поле внутри магнитной частицы. Уравнение связи внутреннего и внешнего полей в сферическом образце есть  $H^{(i)} = H - 4\pi m/3$ . Отсюда находится значение внутреннего магнитного поля

$$H^{(i)} = \frac{H}{1 + 4\pi\chi/3}. \quad (12)$$

Тогда магнитный момент  $i$ -й частицы можно записать

$$\mu_i = \frac{V_i}{\chi^{-1} + 4\pi/3} \times \left( H_0(r_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N h(r_i - r_j, \mu_j) \right), \quad (13)$$

$i = 1..N$ .

Введем следующие обозначения:  $r_{ij} = r_i^0 - r_j^0 + u_i^p - u_j^p$ ,  $r_{ij} = |r_{ij}|$ ,  $H_0(r_i) = H_{0i}$ , с учетом которых последнее уравнение переписывается

$$\sum_{j=1}^N \left[ (1 - \delta_{ij}) \left( \frac{g}{r_{ij}^3} - 3 \frac{r_{ij}^p r_{ij}^p}{r_{ij}^5} \right) + \delta_{ij} g \frac{\chi^{-1} + 4\pi/3}{V_i} \right] \mu_j = H_{0i}. \quad (14)$$

Таким образом, получена система 3N линейных алгебраических уравнений относительно векторов магнитных моментов  $\mu_j$  частиц.

Введем обозначение

$$A^{ij}(U) = \begin{cases} g/r_{ij}^3 - 3r_{ij}^p r_{ij}^p / r_{ij}^5, & i \neq j \\ g(\chi^{-1} + 4\pi/3)/V_i, & i = j \end{cases}. \quad (15)$$

Тогда последняя система переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^N A^{ij} \mu_j = H_{0i}. \quad (16)$$

Преобразуем эту линейную систему уравнений к стандартному виду через блочную матрицу  $\bar{A}$  в декартовой системе координат:

$$\begin{pmatrix} [A_{xx}^{ij}] & [A_{xy}^{ij}] & [A_{xz}^{ij}] \\ [A_{yx}^{ij}] & [A_{yy}^{ij}] & [A_{yz}^{ij}] \\ [A_{zx}^{ij}] & [A_{zy}^{ij}] & [A_{zz}^{ij}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [(\mu_x)_j] \\ [(\mu_y)_j] \\ [(\mu_z)_j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(H_{0x})_j] \\ [(H_{0y})_j] \\ [(H_{0z})_j] \end{pmatrix} \quad (17)$$

Вводя обозначение

$$\bar{A} \cdot \bar{\mu} = \bar{H}_0, \quad (18)$$

для энергии ансамбля диполей имеем

$$U_{mag} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \mu_j \cdot H_0 = -\frac{1}{2} \bar{H}_0 \cdot \bar{A}^{-1}(U) \cdot \bar{H}_0. \quad (19)$$

### Результаты решения связанной задачи

Запишем суммарную энергию магнитоупругой системы:

$$U_{tot} = \frac{1}{2} U \cdot L \cdot U - \frac{1}{2} \bar{H}_0 \cdot \bar{A}^{-1}(U) \cdot \bar{H}_0. \quad (20)$$

Таким образом, равновесная конфигурация определяется минимумом энергии при ограничениях

$$U_{tot} \rightarrow \min, \quad r_i^0 + u_i^p - r_j^0 + u_j^p > R_i + R_j, \quad i \neq j, \quad (21)$$

Как пример использования предложенного подхода выполнен расчет для кубического образца со стороной  $l$ , в котором случайным образом распределены 64 одинаковые магнитомягкие частицы. Объемная концентрация частиц составляет 26,4%. Куб закреплен следующим образом:  $u_x(x=0) = 0$ ,  $u_y(y=0) = 0$ ,  $u_z(z=0) = 0$ . Магнитное поле  $H_0$  направлено вертикально вверх.

На рис. 1, а представлена конфигурация того же образца в магнитном поле  $H_0 / \sqrt{G_m} = 14$  и под действием механического усилия  $F^b / G_m = 5$ . На рис. 2, а точками приведена зависимость средней деформации  $\varepsilon = u^b / l$  от приложенного магнитного поля. Как показывает сплошная линия, начальная деформация примерно до 3% линейно зависит от величины  $H_0^2$ , по смыслу являющейся «магнитным давлением». Рис. 2, б иллюстрирует зависимость начального эффективного модуля Юнга  $E = F^b / S \varepsilon G_m$  от  $H_0$ . Точки – результат численного эксперимента. Линия – фитирование параболой четвертой степени.

На рис. 2, в представлена зависимость деформации  $\varepsilon$  при росте и уменьшении

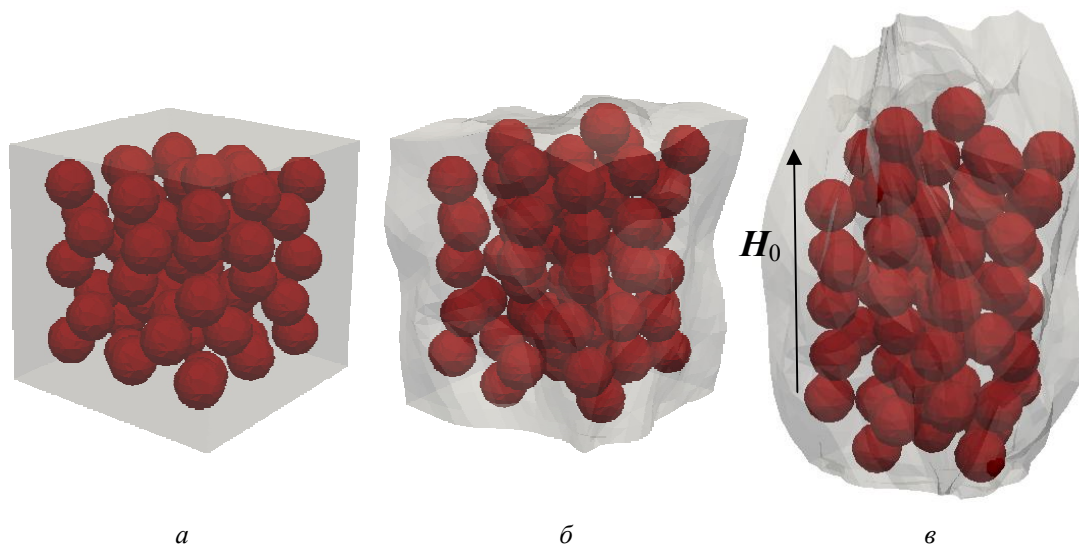


Рис. 1. Начальное распределение частиц:  $H_0 = 0$ ,  $F^b = 0$  (а);  
образец в магнитном поле  $H_0 / \sqrt{G_m} = 14$  (б);  
образец в магнитном поле  $H_0 / \sqrt{G_m} = 14$  и под действием усилия  $F^b / G_m = 5$  (в)

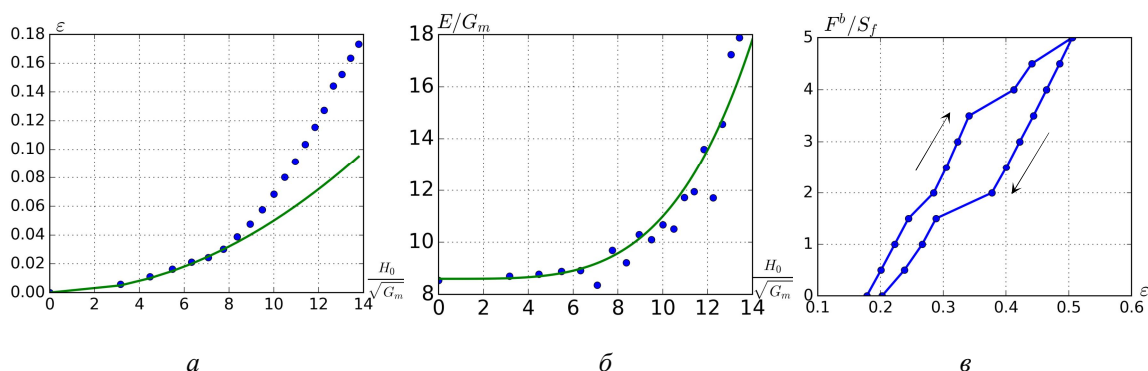


Рис. 2. Зависимость средней деформации вдоль поля от безразмерного магнитного поля. Точки – численный расчет, линия – парабола по начальным точкам (а); зависимость эффективного начального модуля Юнга образца от приложенного магнитного поля (б); зависимость деформации при росте и уменьшении усилия  $F^b$  в магнитном поле  $H_0 / \sqrt{G_m} = 14$  (в)

усилия на верхней стороне  $F^b$  в магнитном поле  $H_0 / \sqrt{G_m} = 14$ . Видно, что прямой и обратный ход этой кривой не сов-

падают, а также есть остаточная деформация, что говорит о том, что наблюдается эффект пластичности.

## DEFORMATION OF A MAGNETIC ELASTOMER WITH ALLOWANCE FOR MAGNETO-INDUCED STRUCTURE FORMATION

O.V. Stolbov

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of RAS*

In this work a numerical scheme is presented that enables one to calculate in detail a quasi-static deformation of a SME sample containing up to several tens of particles. The algorithm is organized as follows. First for the sample of a given shape by finite element method under given boundary conditions the linear response tensor  $L$  is evaluated, which relates to each other the displacements of

the sample boundaries and those of the particles for a given distribution of the applied forces. The energy of the sample is composed as a sum of the elastic (evaluated with the aid of L) and magnetic parts. This function is then minimized for each value of the applied field under assumptions of incompressibility of the matrix and non-overlapping of the particles. By that, the equilibrium values of the particle displacements and the sample boundary deformations are determined. The developed approach is stable even under substantial structure changes. As an example, a SME sample containing 64 particles is considered. Its stress-strain curves for different values of the applied field and the field dependence of the elastic modulus are presented.

*Keywords:* ferrogel, magnetomechanics, magnetoelasticity.

**Сведения об авторе**

*Столбов Олег Валерьевич*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1;  
e-mail: sov@icmm.ru

*Материал поступил в редакцию 21.10.2016 г.*